TD 2 - Construction d'espaces

Notions du cours.
- Topologie initiale, topologie finale, topologie produit.
- Topologie quotient, saturé.
- Recollement d'espaces.
- Attachement cellulaire, complexes cellulaires.

Dans la suite, on considère les espaces topologiques suivants.
- La n-sphère est l'espace $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$, muni de la topologie induite par la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{K}$ est donné par $\mathbb{KP}^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, avec $x = (x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) = y$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $y = \lambda x$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K}^{n+1}$ est considéré avec la topologie induite par la distance euclidienne, et $\mathbb{KP}^n$ est muni de la topologie quotient.

Topologie initiale, finale, quotients.

Exercice 1. Considerons les applications $i^\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par $i^\pm(x) = \pm x$. Soit τ la topologie des demi-droites positives sur $\mathbb{R}$.

(a) Décrire la topologie initiale associée aux applications $i^\pm : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau)$.

(b) Décrire la topologie finale associée aux applications $i^\pm : (\mathbb{R}, \tau) \to \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie éuclidienne ε. Considerons sur $\mathbb{R}$ la topologie initiale τ associée aux applications affines $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $(\mathbb{R}, \tau)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, \varepsilon)$.

Soit maintenant E un ensemble non vide muni de la topologie discrète, et $X = \mathbb{R} \times E$ muni de la topologie produit. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur X donnée par $(x_1, e_1)\mathcal{R}(x_2, e_2)$ si et seulement si $(x_1, e_1) = (x_2, e_2)$ ou $x_1 = x_2 = 0$. Soit σ la topologie quotient sur $Y = X/\mathcal{R}$.

(b) Décrire une base de voisinages de σ en tout point $p \in Y$.

Considerons deux points $p_1 = [(x_1, e_1)], p_2 = [(x_2, e_2)]$ dans Y, et définissons $d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1|$ si $e_1 = e_2$, et $d(p_1, p_2) = |x_1| + |x_2|$ si $e_1 \neq e_2$.

(c) Montrer que d est une distance sur Y.

(d) Sous quelle condition sur E on a que (Y, d) est homéomorphe à (Y, σ) ?

Soit $\mathrm{pr} : X \to \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée.

(e) Montrer que l'application $f_{a,b} \circ \mathrm{pr} : X \to \mathbb{R}$ induit une application continue $F_{a,b} : Y \to \mathbb{R}$.

(f) Soit τ la topologie initiale associée aux applications $F_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Est-ce que (Y, σ) et (Y, τ) sont deux espaces homéomorphes ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^n$ définie par $v_1 \mathcal{R} v_2$ si et seulement si $v_2 - v_1 \in \mathbb{Z}^n$.
Montrer que $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$.

Exercice 4. Soit X un espace topologique, et $A \subseteq X$ une partie ouverte (ou fermée).

(a) Montrer que la surjection canonique $\pi : X \to X/A$ donne un homéomorphisme de $X \setminus A$ sur son image $\pi(X \setminus A)$.

(b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'hypothèse A ouvert ou fermé est nécessaire.

(c) Montrer que si f est l'inclusion d'une partie A de X dans X et $g : A \to \star$ est une application constante, alors $X \cup_A \star \cong X/A$, le recollement fait par rapport à f et g.

Soit Y un autre espace topologique, et soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme qui induit un homéomorphisme entre des parties $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$.

(d) Montrer que Φ induit un homéomorphisme $\Psi : X/A \to Y/B$.

Exercice 5. Soit X un espace topologique. On dénote par $C(X)$ le cône sur X, et par $S(X)$ la suspension sur X. On rappelle que

$$C(X) := X \times [0,1]/(X \times \{1\}), \qquad S(X) := X \times [-1,1]/\{X \times \{1\}, X \times \{-1\}\},$$

où les intervalles réels sont considérés avec la topologie induite par la distance euclidienne.

(a) Montrer que si $X_1 \cong X_2$, alors $C(X_1) \cong C(X_2)$ et $S(X_1) \cong S(X_2)$.

(b) Montrer que $S(X) \cong C(X)/(X \times \{0\})$.

(c) Montrer que $S(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{S}^{n+1}$, et $C(\mathbb{B}^n) \cong S(\mathbb{B}^n) \cong \mathbb{B}^{n+1}$.

Exercice 6. Soit $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ muni de la topologie produit, où $\mathbb{R}$ est considéré avec sa topologie euclidienne et $\{0,1\}$ avec la topologie discrète. On considère sur X la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ donnée par

$$p_j = (x_j, \varepsilon_j); \quad p_1 \mathcal{R} p_2 \text{ ssi } p_1 = p_2 \text{ ou } x_1 = x_2 \neq 0.$$

Soit $Y = X/\mathcal{R}$, considéré avec la topologie quotient.

(a) Donner une base de voisinages du point $[(0,0)]$.

(b) Quels axiomes de séparabilité satisfait τ ?

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ notons f l'inverse de la projection stéréographique, de source le plan d'équation $x_3 = 0$ et de but la sphère unité, centrée à l'origine et privée de son pôle nord $N = (0,0,1)$. Construire une application $g : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2$ dont la restriction à $\mathbb{C} \times \{1\}$ s'identifie à l'application f. En déduire l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{CP}^1$ et $\mathbb{S}^2$.

Produits et projections.

Exercice 8 (projection). Soient X, L deux espaces topologiques, et $p_X : X \times L \to X$ la projection sur le premier facteur.

(a) Montrer que p_X est une application ouverte.

(b) Montrer que si L est compact, alors p_X est une application fermée.

(c) Donner un exemple de projection qui n'est pas fermée.

Exercice 9 (connexité). Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $X \times Y$ considéré avec la topologie produit.

(a) Montrer que $X \times Y$ est connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si X et Y sont connexes (resp. connexes par arcs).

(b) Montrer que $X \times Y$ est localement connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si X et Y sont localement connexes (resp. connexes par arcs).

(c) Montrer que les composantes connexes (resp. connexes par arcs) C de $X \times Y$ sont les produits de composantes connexes (resp. connexes par arcs) $C_X \times C_Y$ de X et de Y.

Exercice 10 (compacité). Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $X \times Y$ considéré avec la topologie produit.

(a) Montrer que $X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.

(b) Montrer que $X \times Y$ est séquentiellement compact si et seulement si X et Y sont séquentiellement compacts.

(c) Montrer que $X \times Y$ est localement compact si et seulement si X et Y sont localement compacts.

Exercice 11 (axiomes de séparation et dénombrabilité). Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $X \times Y$ considéré avec la topologie produit.

(a) Montrer que $X \times Y$ est T_n si et seulement si X et Y le sont, pour $n = 0, 1, 2$.

(b) Montrer que $X \times Y$ est séparable si et seulement si X et Y le sont.

(c) Montrer que $X \times Y$ est à base dénombrable (resp., à base dénombrable de voisinages) si et seulement si X et Y le sont.

Complexes cellulaires.

Exercice 12. Soient X, Y deux espaces topologiques.

(a) Montrer que si X est séparé et tout point de X admet un voisinage compact, alors X est localement compact.

Soit $f : X \to Y$ une application continue.

(b) Montrer que Y est muni de la topologie finale pour f si, et seulement si, la propriété suivante est vérifiée :

"une application $g : Y \to Z$ est continue si, et seulement si, la composée $g \circ f$ est continue".

(c) En utilisant les questions précédentes montrer que si $\pi : X \to Q$ est une application continue surjective, Q est muni de la topologie finale pour π et L est localement compact alors $Q \times L$ est muni de la topologie finale pour l'application continue $\pi \times \mathrm{id}_L : X \times L \to Q \times L$ (qui à tout couple (x, l) associe le couple $(\pi(x), l)$).

(d) En déduire l'existence d'un homéomorphisme $(X \times I)/\mathcal{R} \cong (X/A) \times I$, où A est une partie de X, I est l'intervalle $[0, 1]$ et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(a, t)\mathcal{R}(a', t)$ si $a, a' \in A$ et $t \in I$.

(e) En déduire l'existence d'un homéomorphisme

$$(X \cup_f e^n) \times I \cong (X \times I) \cup_{f \times \mathrm{id}_I} (e^n \times I),$$

pour X espace topologique et $I = [0, 1]$. Ici $e^n \cong B^n$ est une n-cellule, et $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ est l'application continue qui définie l'idéntification au bord de la cellule. De façon analogue le récollement $f \times \mathrm{id}_I$ est fait par sur le lieu $\mathcal{S}^{n-1} \times I \hookrightarrow \mathbb{B}^n \times I$.

Exercice 13. Soit $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, et sur Q la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour $x \in [0, 1]$, et $(0, y) \sim (1, y)$ pour $y \in [0, 1]$.

(a) Montrer que $X = Q/\sim$ est homeomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(b) Décrire une structure de complexe cellulaire de X.

Exercice 14. Soit $\mathbb{S}^n$ la n-sphère.

(a) Décrire une structure de complexe cellulaire de $\mathbb{S}^n$.

En $\mathbb{R}^3$ (avec la topologie euclidienne), considérons les sous-ensembles

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \qquad D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad A = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 1\}.$$

(b) Décrire une structure de complexe cellulaire de $S \cup A$.

(c) Décrire une structure de complexe cellulaire de $S \cup D$.

(d) Décrire une structure de complexe cellulaire de $S \cup D \cup A$.

Exercice 15 (espaces projectifs réels). Sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la rélation d'equivalence $x \sim y$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec $y = \lambda x$. On denote toujours avec $\sim$ cette relation d'équivalence restrainte à $\mathbb{S}^n$ la sphère unitaire (dite relation antipodale).

(a) Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\sim$.

(b) Montrer que $\mathbb{S}^n/\sim$ est homéomorphe à $D^n_+/\sim$, où $D^n_+ = \mathcal{S}^n \cap \{x_n \geq 0\}$, et $\sim$ est la relation antipodale sur $\partial D^n_+ =: S^{n-1}$.

(c) En déduire une structure de complexe cellulaire pour $\mathbb{RP}^n$.

Exercice 16 (espaces projectifs complexes). Sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ on considère la relation d'équivalence $z \sim w$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $w = \lambda z$. On denote toujours avec $\sim$ cette relation d'équivalence restrainte à $\mathbb{S}^{2n+1}$ la sphère unitaire.

(a) Montrer que $\mathbb{CP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{2n+1}/\sim$.

Soit $D^{2n} = \{z \in \mathbb{C}^n, \|z\| \leq 1\}$ la boule fermée de centre 0 et rayon 1 par rapport à la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$. Considerons la fonction $f : D^{2n} \to \mathbb{R}_+$, $f(z) = \sqrt{1 - \|z\|^2}$, et dénotons par D^{2n}_+ son graphe.

(b) Montrer que $\mathbb{S}^{2n+1}/\sim$ est homéomorphe à $D^{2n}_+/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence $z \sim \lambda z$ pour tout λ satisfaisant $|\lambda| = 1$ sur $\partial D^{2n}_+ =: S^{2n-1}$.

(c) En déduire une structure de complexe cellulaire pour $\mathbb{CP}^n$.

Exercice 17. Soit $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ le bouquet d'un cercle et d'une sphère.

(a) Donner une structure de complexe cellulaire pour X.

(b) Donner une structure de complexe cellulaire pour le cône $C(X)$, et pour la suspension $S(X)$.

Exercice 18 (constructions de complexes cellulaires). Soit X et Y deux complexes cellulaires de dimension finie.

(a) Si A est un sous-complexe cellulaire de X, montrer que X/A a une structure de complexe cellulaire.

(b) Donner une structure de complexe cellulaire pour $X \times Y$.

(c) Donner une structure de complexe cellulaire pour le cone $C(X)$, et pour la suspension $S(X)$.

(d) Donner une structure de complexe cellulaire pour le bouquet $X \vee Y$.